

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

Estructura de la prueba: la prueba se compone de dos opciones "A" y "B", cada una de las cuales **consta de cinco preguntas** que, a su vez, comprenden varias cuestiones. Sólo se podrá contestar una de las dos opciones, desarrollando íntegramente su contenido. En el caso de mezclar preguntas de ambas opciones la prueba será calificada con 0 puntos.

Puntuación: la calificación máxima total será de 10 puntos, estando indicada en cada pregunta su puntuación parcial.

Tiempo: 1 hora y 30 minutos.

OPCIÓN A

Ejercicio 1

- a) (1 punto) Determinar el valor del parámetro λ para que los puntos $A(1, 2, 0)$, $B(5, -4, 0)$ y $C(2, \lambda, 0)$ estén alineados.
- b) (1 punto) Sabiendo que $A(1, 2, 0)$ es el punto medio del segmento PQ y que $P(-1, 3, 0)$, calcula las coordenadas del punto Q .

Ejercicio 2

(2 puntos) Determinar el valor o los valores del parámetro a para los que el siguiente sistema es compatible determinado y resolver el sistema resultante para dicho valor o valores.

$$\begin{cases} 3x + 5y + 3z = 2a \\ -x - 2y + z = a + 2 \\ x + 2y = -1 \end{cases}$$

Ejercicio 3

(1 punto) Calcular el valor del parámetro a para que sea continua la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} ae^{2x} + x^2 e^{-x} & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 \operatorname{sen}(2x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Ejercicio 4

- a) (1 punto) Hallar los valores del parámetro a para los que la siguiente matriz es invertible:

$$\begin{pmatrix} -4 & 0 & 5 \\ a & a & a^2 \\ 6 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

- b) (1 punto) Sabiendo que un vértice del cuadrado inscrito en la circunferencia contenida en el plano $z = 0$, centrada en el origen $(0, 0, 0)$ y de radio 1 es el punto $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$, determina los otros tres vértices del cuadrado.

Ejercicio 5

Calcular los siguientes límites:

- a) (1 punto) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3x-1)^3}{5x^3 - 3x^2 + 1}$ b) (1 punto) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 8}{3x^2 - 18x + 24}$ c) (1 punto) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x + 7}{5x^3 - 5x^2 + 2}$

OPCIÓN B

Ejercicio 1

- a) (1 punto) Hallar el ángulo que forman los planos $\pi_1 \equiv x + y + 3 = 0$ y $\pi_2 \equiv y - 2 = 0$.
- b) (1 punto) Hallar el punto simétrico de $A(2, 1, 0)$ respecto del plano $\pi_1 \equiv x - y = 0$.
- c) (1 punto) Hallar el punto simétrico de $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ respecto del origen $(0, 0, 0)$.

Ejercicio 2

(2 puntos) Hallar las matrices cuadradas de orden 2 X e Y que verifican

$$X + 2Y = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad 2X + Y = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 3

(1 punto) Estudiar la continuidad de la función $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} + x - 1 & \text{si } x \leq 0 \\ (x-2)e^x \operatorname{sen}(x) & \text{si } 0 < x \leq 2 \\ (2-x)x^3 e^{x^2} & \text{si } 2 < x \end{cases}$$

Ejercicio 4

Calcular los siguientes límites:

a) (1 punto) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{x^2 - 5x + 6}$ b) (1 punto) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x-3} - \sqrt{x+3}$

Ejercicio 5

(2 puntos) Determinar si la siguiente matriz es invertible o no y, en caso afirmativo, calcular su matriz inversa:

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN Y GUIÓN DE RESPUESTAS

OPCIÓN A:

Ejercicio 1

a) **Solución:** $\lambda = \frac{1}{2}$.

Planteamiento y razonamiento correctos: 0,5 puntos.

Solución correcta: 0,5 puntos.

b) **Solución:** $Q(3,1,0)$.

Planteamiento y razonamiento correctos: 0.5 puntos.

Solución correcta: 0.5 puntos.

Ejercicio 2

Solución: El sistema es compatible y determinado para todos los valores de a , ya que el determinante de la matriz del sistema es 1. La solución es $[x,y,z] = [-1 - 2a, a, a + 1]$

Planteamiento y razonamiento correctos: 1 punto.

Solución correcta: 1 punto.

Ejercicio 3

Solución: La función es continua para $a = 0$.

Planteamiento y razonamiento correctos: 0.5 puntos.

Solución correcta: 0.5 puntos.

Ejercicio 4

a) **Solución:** La matriz es invertible para $a \neq 0, a \neq \frac{9}{4}$.

Planteamiento y razonamiento correctos: 0,5 puntos.

Solución correcta: 0,5 puntos.

b) **Solución:** Los puntos que satisfacen la condición del enunciado son $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$.

Planteamiento y razonamiento correctos: 0,5 puntos.

Solución correcta: 0,5 puntos.

Ejercicio 5

Soluciones:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3x-1)^3}{5x^3 - 3x^2 + 1} = -1$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 8}{3x^2 - 18x + 24} = \frac{-4}{3}$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x + 7}{5x^3 - 5x^2 + 2} = 0$

Planteamiento y razonamiento correctos de cada apartado: 0.5 puntos.

Solución correcta de cada apartado: 0.5 puntos.

OPCIÓN B:

Ejercicio 1

a) **Solución:** $\pi_1 \pi_2 = \frac{\pi}{4}$.

Planteamiento y razonamiento correctos: 0,5 puntos.

Solución correcta: 0,5 puntos.

b) **Solución:** $(1, 2, 0)$.

Planteamiento y razonamiento correctos: 0,5 puntos.

Solución correcta: 0,5 puntos.

c) **Solución:** $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$.

Planteamiento y razonamiento correctos: 0,5 puntos.

Solución correcta: 0,5 puntos.

Ejercicio 2

a) **Solución:** $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Planteamiento y razonamiento correctos: 1 punto.

Solución correcta: 1 punto.

Ejercicio 3

Solución: La función es continua en toda la recta real.

Planteamiento y razonamiento correctos: 0.5 puntos.

Solución correcta: 0.5 puntos.

Ejercicio 4

Soluciones:

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{x^2 - 5x + 6} = 1$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x-3} - \sqrt{x+3} = 0$

Planteamiento y razonamiento correctos de cada apartado: 0.5 puntos.

Solución correcta de cada apartado: 0.5 puntos.

Ejercicio 5

Solución: La matriz inversa es $\begin{bmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

Planteamiento y razonamiento correctos: 1 punto.

Cálculo correcto de la matriz inversa: 1 punto.